I) Interversion de limites

Exercice 1: ★ *b.11.001*

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$, où $f \in \mathcal{C}^0([0\,,1]\,,\mathbb{R})$.
3. $\displaystyle n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(nx)e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} nf(x)e^{-nx}\,\mathrm{d}x$, où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée.

Exercice 2: ★ *d.01.001*

Etudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 3: ★ *b.11.002*

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$.

1. Donner I_0, I_1 et I_2.
2. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Trouver un équivalent de $I_n - I$.
4. On pose $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle J = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(1+k)^2}$.

Exercice 4: ★ *d.01.018*

Soit $f : [0\,,+\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ continue.
On suppose que la fonction f admet une limite finie par $+\infty$ vers une limite finie ℓ.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\mu_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5: ★ *d.01.027*

Soit $f : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue, bornée et telle que $f(0) \neq 0$.
Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ déterminée par

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 6: ★ *d.01.041*

Montrer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 7: ★★ *b.11.004*

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto n^2 x e^{-nx}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$.
2. Soit g une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$. Etudier la limite de $\displaystyle\int_0^1 g(t) f_n(t) \, \mathrm{d}t$.

Exercice 8: ★★ *b.11.008*

Montrer, pour $x > 1$:

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 9: ★★ *b.11.009*

Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

Exercice 10: ★★ *b.11.015*

Soit $x > 0$. Développer $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1 - e^{xt}} \, \mathrm{d}t$ en série de fonctions rationnelles. En déduire un équivalent de S en 0^+.

Exercice 11: ★★ *b.11.018*

Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^\alpha)^n}$.

1. Trouver une CNS sur $n\alpha$ pour que $I_n(\alpha)$ soit bien définie.

2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$; en déduire une expression de $I_n(\alpha)$.
3. Montrer que la suite $(I_n(\alpha))_n$ converge et donner sa limite.
4. Montrer qu'il existe $K(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \sim \dfrac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Exercice 12: ★★ *d.01.012*

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 13: ★★ *d.01.032*

Soient a et b strictement postifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.
   On note $M(a,b)$ la limite commune de ses suites.
2. On pose
   $$T(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$
   Montrer
   $$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a,b)$$
   On pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right)$
3. Montrer
   $$T(a,b) = \frac{\pi}{M(a,b)}$$

Exercice 14: ★★ *d.01.070*

n désigne un entier naturel non-nul.

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$ est définie.
2. Soit $a \geqslant 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{a} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$. En déduire de la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$.

3. Soit $a \geqslant 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$ converge uniformément sur $[0\,,a]$, puis que :
$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$
4. En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer
$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$
5. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur. Qu'en conclure ?

Exercice 15: ★★★ *b.11.018*

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de $[0\,,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue $f\ :\longmapsto \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 |f_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 |f|$, alors $\displaystyle\int_0^1 |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f^2$, alors $\displaystyle\int_0^1 (f_n - f)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 16: ★★ *d.01.078*

Soit $\alpha > 0$. Etablir que
$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Exercice 17: ★★★ *b.11.019, b.05.051*

Si $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $r > 0$, soit $N_r(P)$ le nombre de racines de P de module au plus r comptées avec multiplicités. On admet dans les deux premières questions le résultat suivant : si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement, si $r > 0$ est tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ de module r, $|Q(z)| \leqslant |P(z)|$, alors $N_r(P+Q) = N_r(P)$.

1. Déduire de l'énoncé admis le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Soit $P = X^4 + 6X + 3$. Déterminer $N_2(P)$, $N_1(P)$, et $N_{\frac{1}{3}}(P)$.
3. Soient $r > 0$ et $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ ne s'annulant pas sur le centre de centre 0 et de rayon r. Montrer que
$$N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P'}{P}(re^{\mathrm{i}t})re^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

d'abord en utilisant D'ALEMBERT-GAUSS, puis sans.

4. Déduire de la question précédente le résultat admis en début d'énoncé.

Exercice 18: ★★★ *d.01.016*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée.

1. Déterminer pour $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n\cos(t)(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 19: ★★★ *d.11.021*

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n^2} \mathrm{d}x$$

II) Intégrales à paramètres

Exercice 20: ★ *b.11.032*

Soit $g : \begin{cases}]-1\,,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Justifier la bonne définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer g'.

Exercice 21: ★ *d.01.083*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^3 + t^3} \end{cases}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. A l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, calculer $f(0)$.
3. Montrer que f est continue et décroissante.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 22: ⋆ *d.01.108*

Soit f une application continue de $\mathbb{R} \times [a\,,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Expliquer pourquoi f est uniformément continue sur $S\times[a\,,b]$ pour tout segement S de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $F\ :\longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{xt}\,\mathrm{d}t$.
3. A l'aide de la question précédente, étudier la continuité de g. Retrouver le résultat en calculant directement $g(x)$.

Exercice 23: ⋆⋆ *b.11.029*

On fixe $a > 0$.

1. Soit, pour $b \in \mathbb{R}$, $F(b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$. Trouver une équation différentielle vérifiée par F et déterminer F.
2. Pour $b \in \mathbb{R}$, soit $G(b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $G(b) = \dfrac{e^{-\frac{b^2}{a}}}{a}\displaystyle\int_0^b e^{\frac{x^2}{a}}\,\mathrm{d}x$.
3. Trouver la limite de $G(b)$ puis celle de $bG(b)$ en $+\infty$.

Exercice 24: ⋆⋆ *b.11.036*

Etudier la monotonie, les limites et équivalents aux bornes du domaine de la fonction suivante :

$$f(x) = e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 25: ⋆⋆ *d.01.109*

Soient $f\ :\ I\times\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $u, v\ :\ I \longmapsto \mathbb{R}$ continues. Montrer la continuité de la fonction

$$x \longmapsto \int_{u(x)} v(x)f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 26: ⋆⋆ *b.11.043*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.
2. Montrer que $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 27: ★★ *d.01.103*

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie et positive sur $]-1\,,+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie.
3. Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
4. On pose pour $x > 0$,
$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$
Montrer que
$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$$
Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Exercice 28: ★★ *d.01.125*

Pour $x, y > 0$, on pose

$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $y > 0$. Montrer que $x \longmapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$.
2. En déduire la valeur de $F(x,y)$.

Exercice 29: ★★ *d.01.136*

1. Montrer que pour tout $x > -1$,
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. En déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

III) Autour de la fonction Γ

Exercice 30: ★★★ *b.11.049*

1. Soit $t > 0$. Montrer que l'application $f_t : \begin{cases}]t\,,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \left(1 - \frac{t}{s})^s\right) \end{cases}$ est croissante.
2. Soit Γ la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par l'égalité $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.
3. Montrer que $\forall x > 0$, $\Gamma(2x) = \dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.